Department of Physics
Rajabhat ChiangMai University

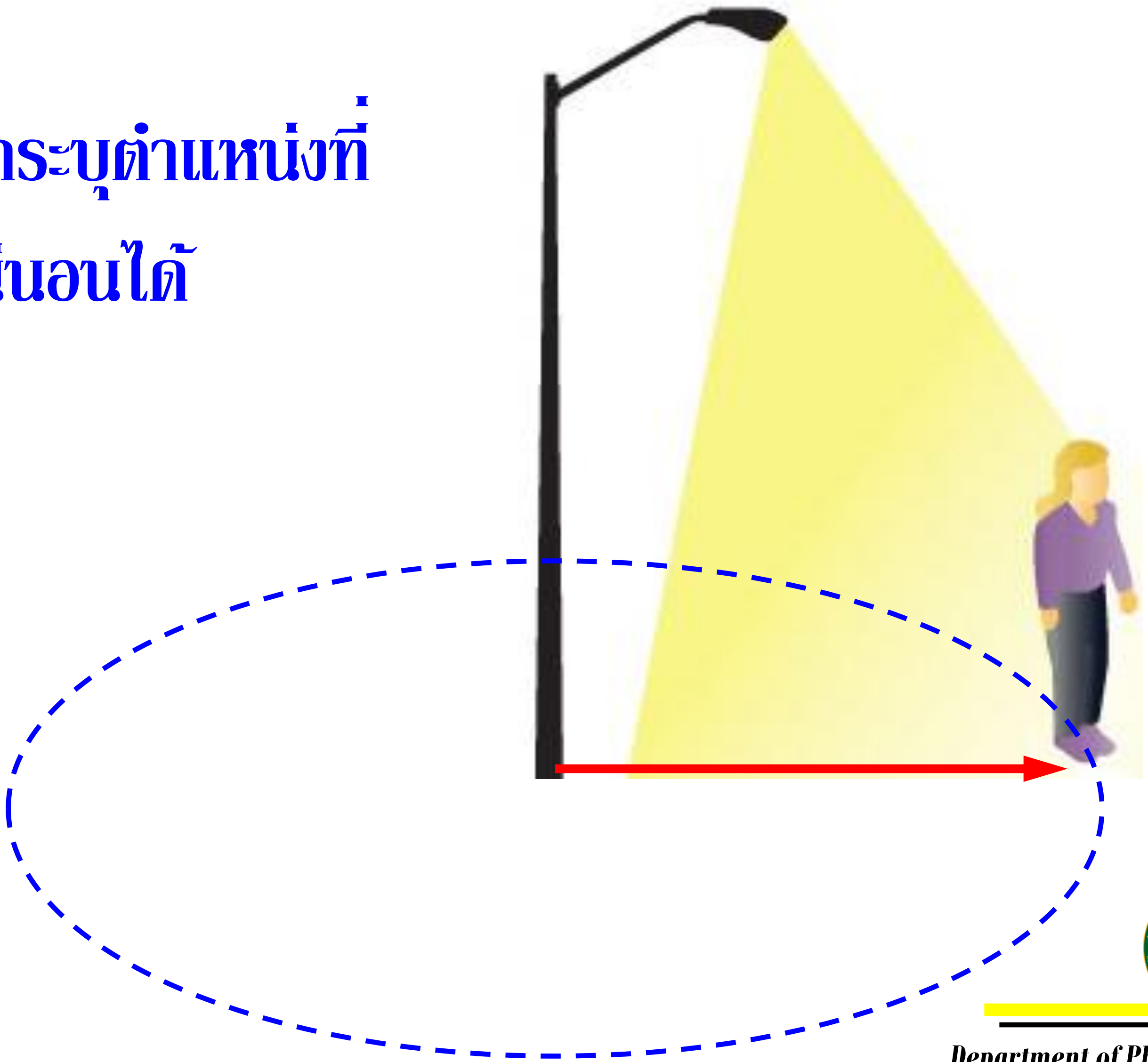
Lecture 2 : ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

(Vector and Scalar quantities)

- บทนำ (Introduction)
- ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantities)
- ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)
  - คุณสมบัติเบื้องต้นของเวกเตอร์
  - การบวก–ลบปริมาณเวกเตอร์
  - การคูณปริมาณเวกเตอร์

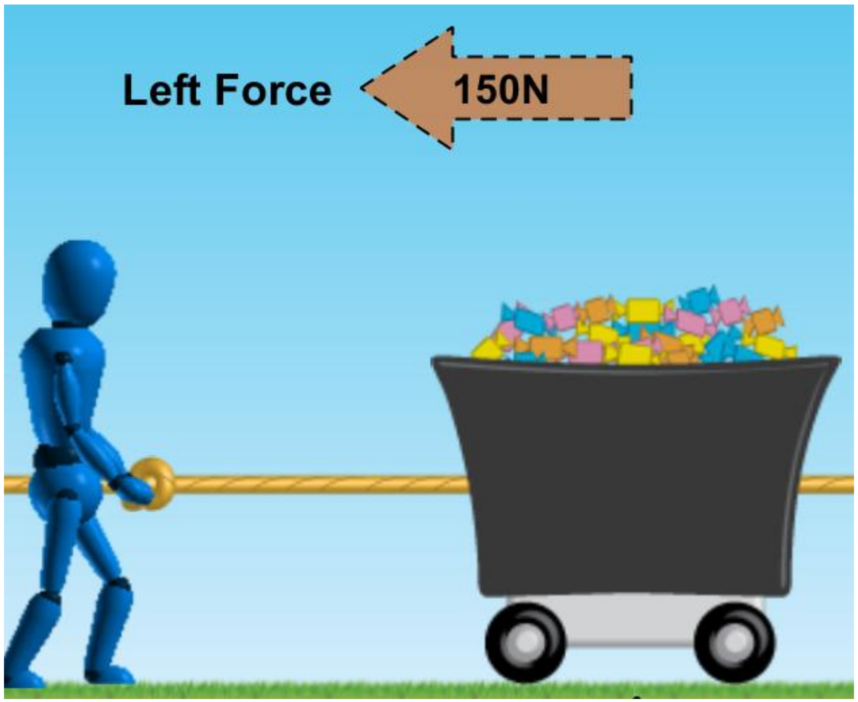
ทำไมต้องมีปริมาณเวกเตอร์ ?

1. เพื่อให้สามารถระบุตำแหน่งที่ชัดเจนแน่นอนได้

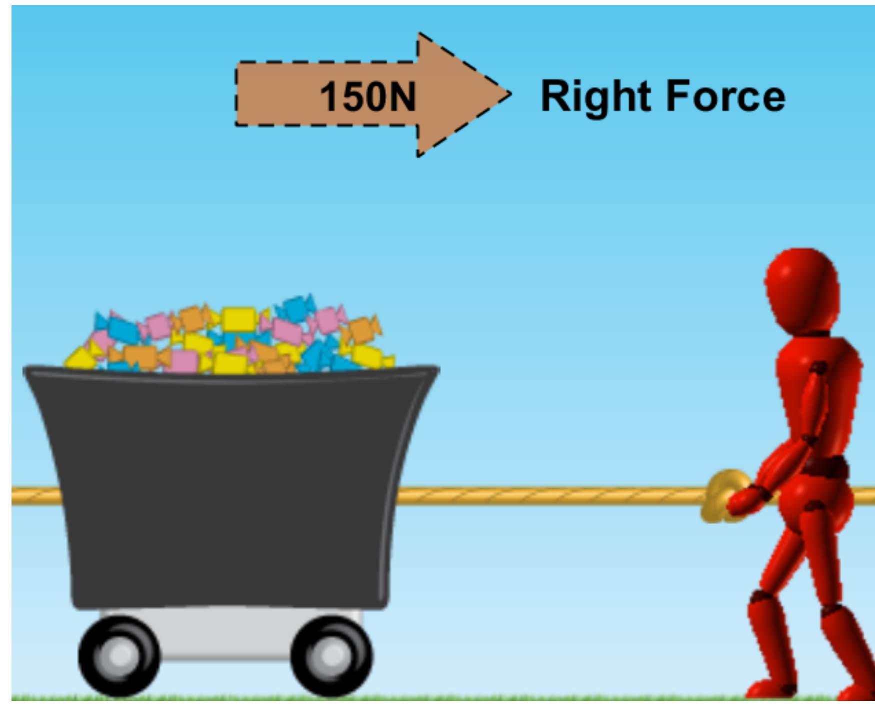


ทำไมต้องมีปริมาณเวกเตอร์ ?

2. เพื่อสามารถบอกผลกระทบที่จะเกิดขึ้นได้แน่นอน



วัตถุเคลื่อนที่ไปทาง “ซ้าย”

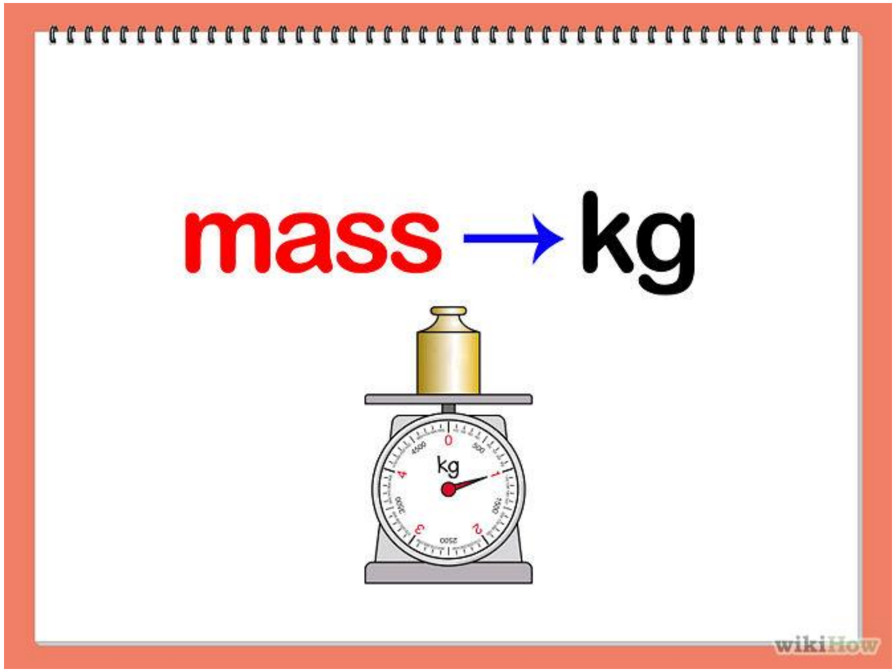


วัตถุเคลื่อนที่ไปทาง “ขวา”

https://phet.colorado.edu/

ปริมาณสเกลาร์ (Scalar quantities)

ปริมาณสเกลลาร์ คือ ปริมาณที่มีเฉพาะ “ตัวเลข” เท่านั้น ก็สามารถสื่อความหมายได้สมบูรณ์ กล่าวคือ สามารถเข้าใจได้ชัดเจน เช่น เวลา มวล อุณหภูมิ ฯลฯ

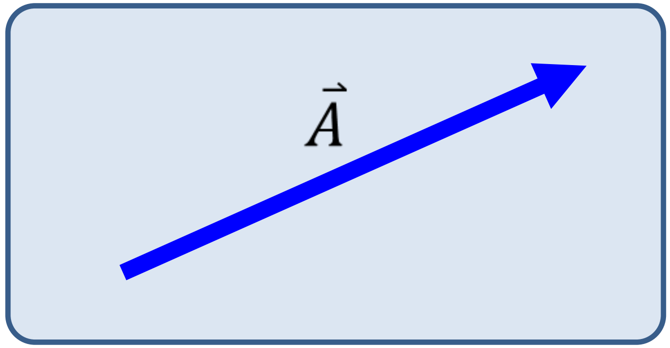


ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่จะต้องมี "ตัวเลข" และ "ทิศทาง" จึงจะสามารถสื่อความหมายได้สมบูรณ์ เช่น แรง, การกระจัด, ความเร็ว, ความเร่ง, โมเมตัม ฯลฯ

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

องค์ประกอบปริมาณเวกเตอร์

ลูกศร → เวกเตอร์



ทิศทางลูกศร → ทิศทางของเวกเตอร์

ความยาวของลูกศร → ขนาดของเวกเตอร์

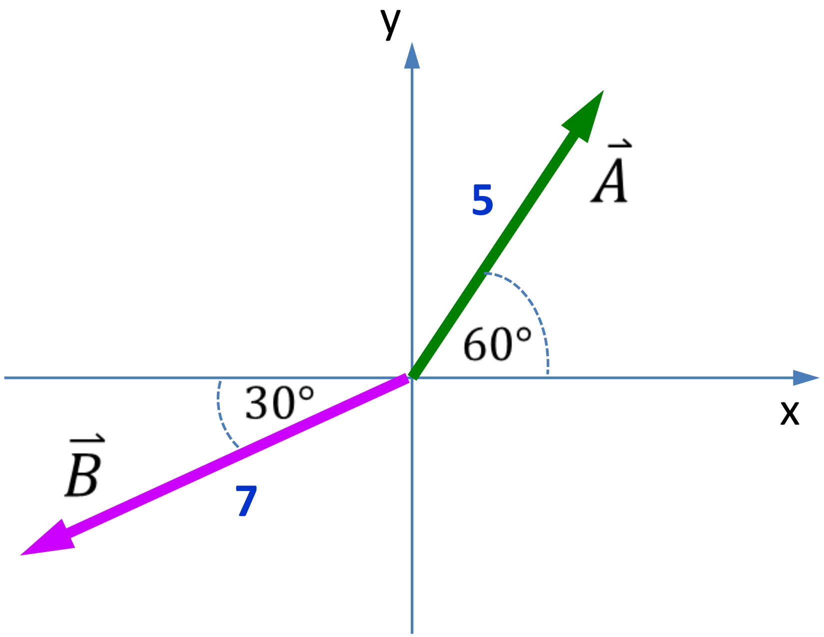
สัญลักษณ์ :

$\vec{A}$ แทน เวกเตอร์ A

$|\vec{A}|$ หรือ A แทน ขนาดของเวกเตอร์ A

วิธีการระบุปริมาณเวกเตอร์ (วิธีที่หนึ่ง)

บอกด้วยขนาดของเวกเตอร์ และ ทิศทางเป็นมุม



เวกเตอร์ $\vec{A}$ มีขนาด 5 หน่วย และ ทำมุม 60° กับแกน +x

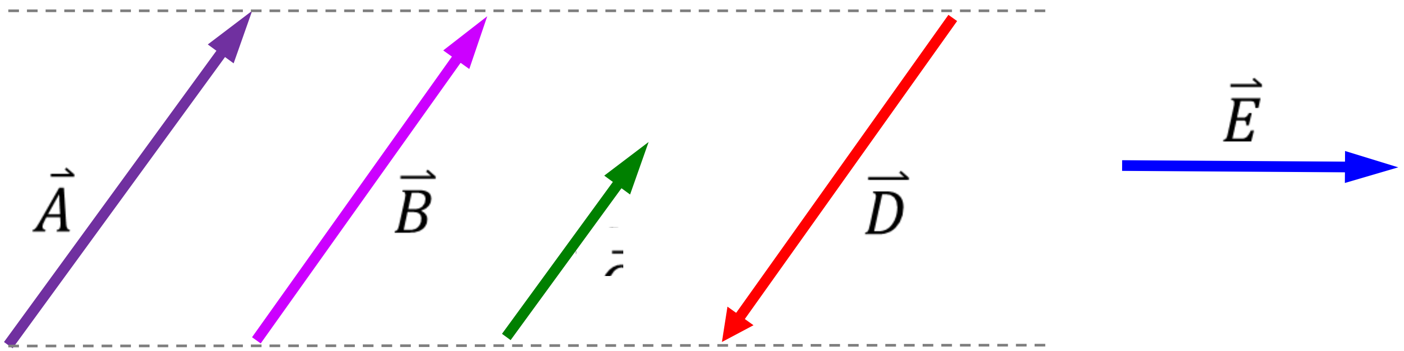
เวกเตอร์ $\vec{B}$ มีขนาด 7 หน่วย และ ทำมุม 30° กับแกน −x

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

คุณสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

1. การเท่ากันของเวกเตอร์ : เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์จะมีค่าเท่ากันเมื่อ

มีขนาดเท่ากัน และ มีทิศทางเดียวกัน



$\vec{A} = \vec{B}$ เพราะมีความยาวเท่ากัน และ มีทิศทางเดียวกัน

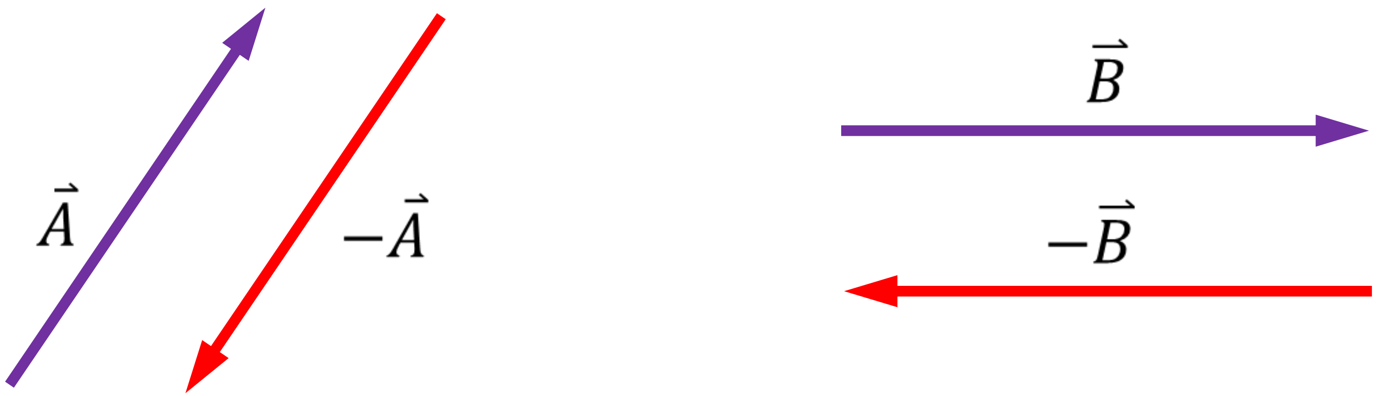
$\vec{A} \neq \vec{C}$ เพราะมีทิศทางเดียวกัน แต่ มีความยาวไม่เท่ากัน

$\vec{A} \neq \vec{D}$ เพราะมีความยาวเท่ากัน แต่ ไม่ได้มีทิศทางเดียวกัน (ทิศตรงข้าม)

$\vec{A} \neq \vec{E}$ เพราะมีความยาวไม่เท่ากัน และ ไม่ได้มีทิศทางเดียวกัน

คุณสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

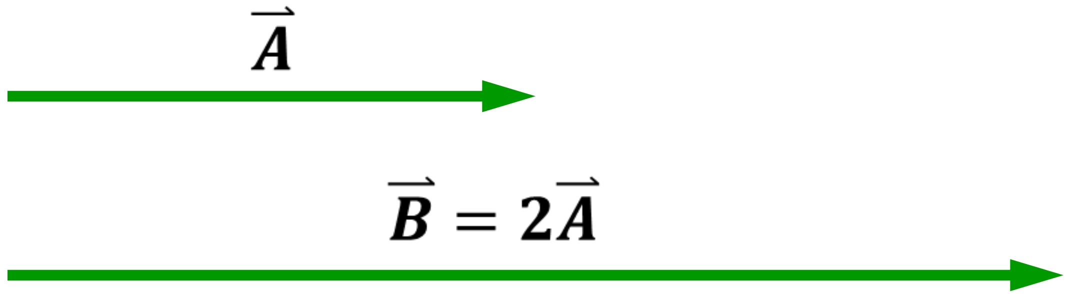
2. เวกเตอร์ลบ : เวกเตอร์ลบของ $\vec{A}$ หรือ $-\vec{A}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ $\vec{A}$ แต่จะมีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{A}$



คุณสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

3. การคูณเวกเตอร์ $\vec{A}$ ด้วยปริมาณสเกลลาร์(ตัวเลขใดๆ) α :

เช่น $\alpha = 2$



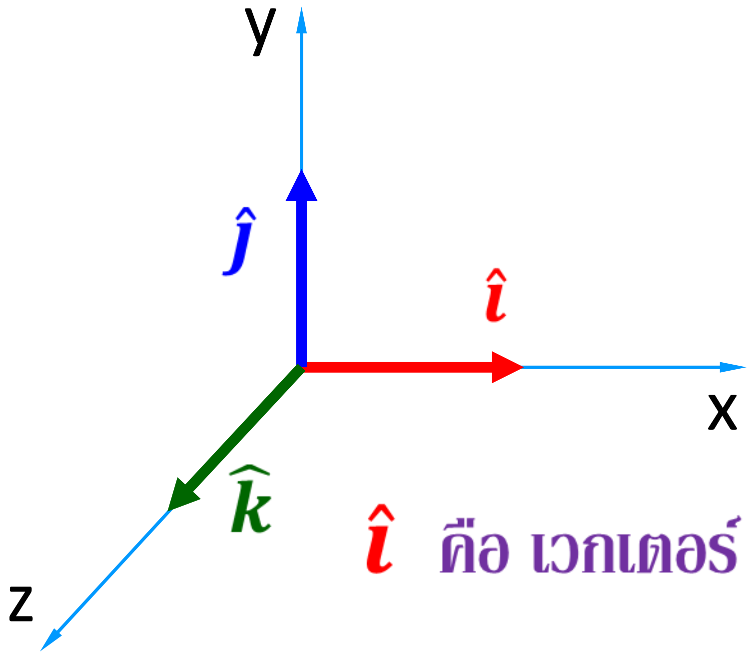
จากรูป ถ้า $\vec{B} = 2\vec{A}$ $(\alpha = 2)$ จะได้ว่า

$\vec{B}$ จะมีขนาดเป็น 2 เท่าของ $\vec{A}$

$\vec{B}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{A}$

คุณสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

4. เวกเตอร์หน่วย: เวกเตอร์หน่วย คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดความยาวเท่ากับ 1 หน่วย เวกเตอร์หน่วยที่สำคัญ ประกอบด้วย



$\hat{i}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่อยู่ในแนวแกน x

$\hat{j}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่อยู่ในแนวแกน y

$\hat{k}$ คือ เวกเตอร์ 1 หน่วย ที่อยู่ในแนวแกน z

การบวกเวกเตอร์

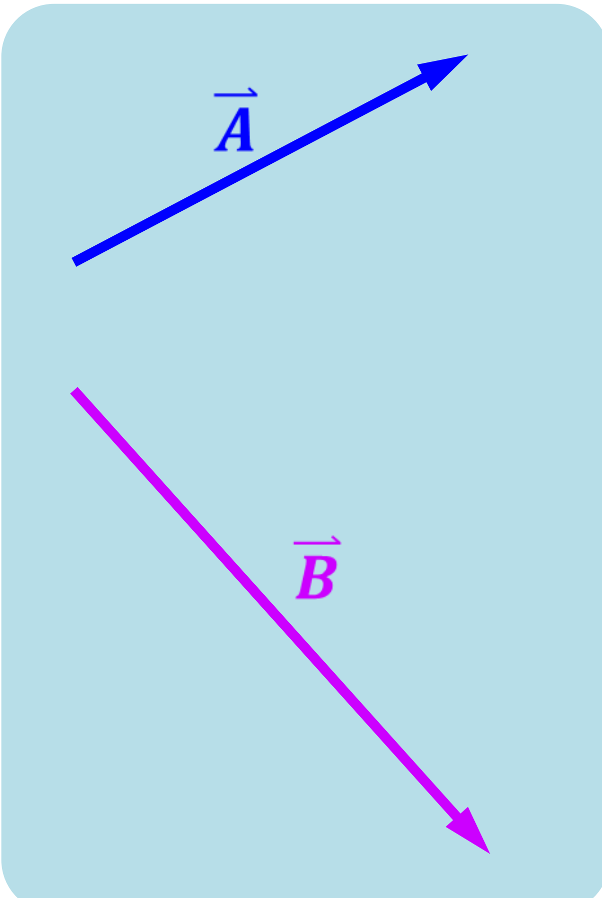
การบวกเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์นั้นจะต้องทำการบวกโดยต้องนำทิศทางของเวกเตอร์เข้ามาคิดด้วย (ต่างจากการบวกปริมาณสเกลลาร์ที่มีการรวมเฉพาะขนาดเท่านั้น) การบวกเวกเตอร์โดยทั่วไปสามารถทำได้ 3 วิธี คือ

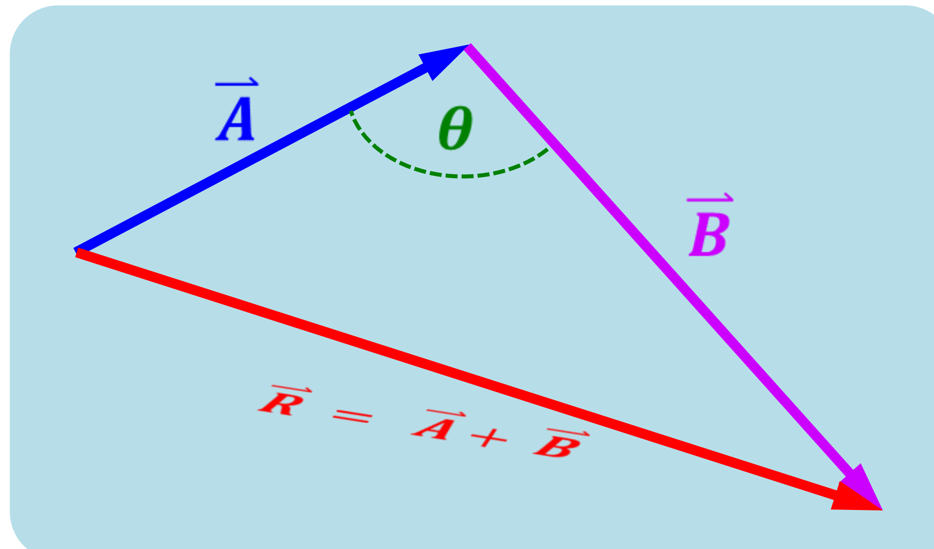
1. วิธีหางต่อหัว
2. วิธีวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
3. วิธีแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย

การบวกเวกเตอร์ (ต่อ)

1. โดยวิธีหางต่อหัว

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$





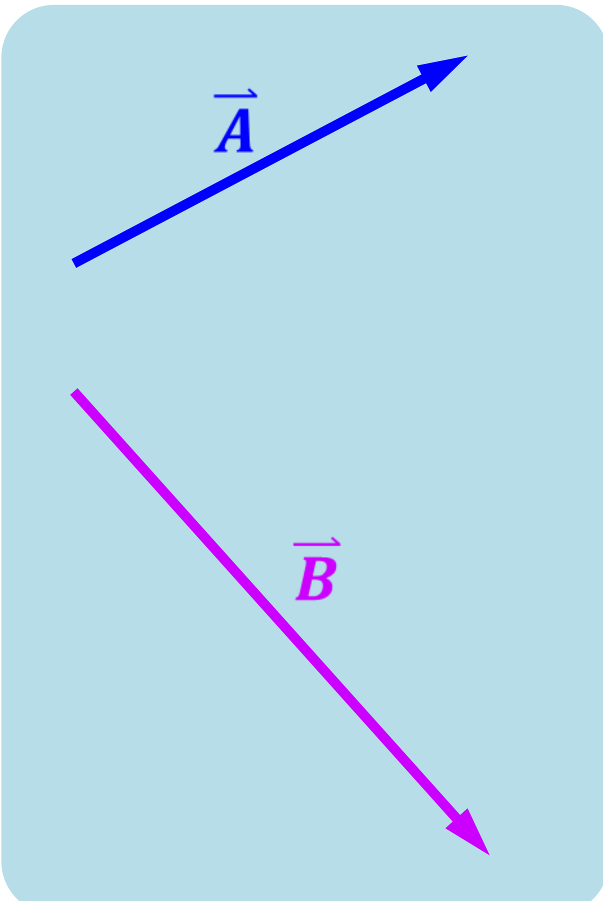
ขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์ (R)

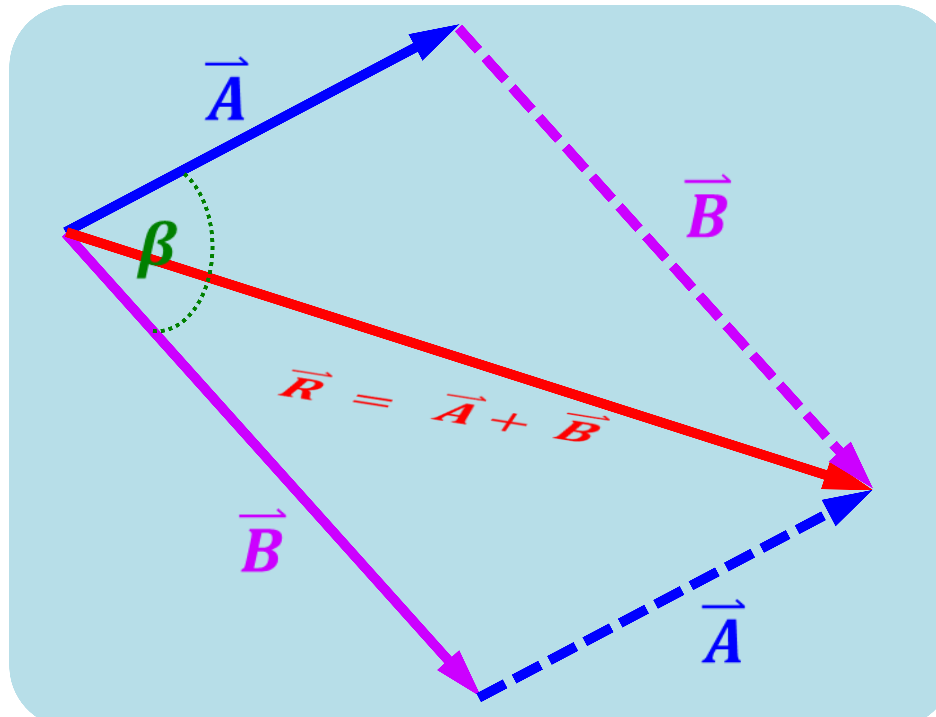
$$R = \ A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

การบวกเวกเตอร์ (ต่อ)

2. โดยวิธีวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$





ขนาดของเวกเตอร์ผลลัพธ์ (R)

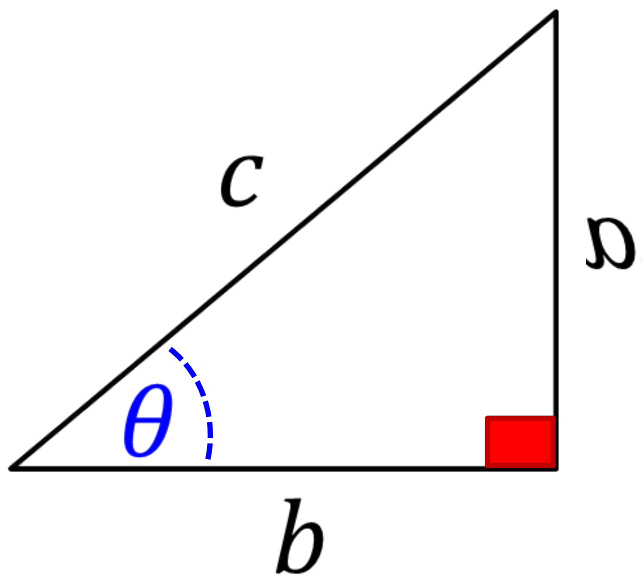
$$R = A^2 + B^2 + 2AB\cos\beta$$

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

การบวกเวกเตอร์ (ต่อ)

3. วิธีการแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย

ตรีโกณมิติ (ทบทวน)



$$\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{b}{c}$$

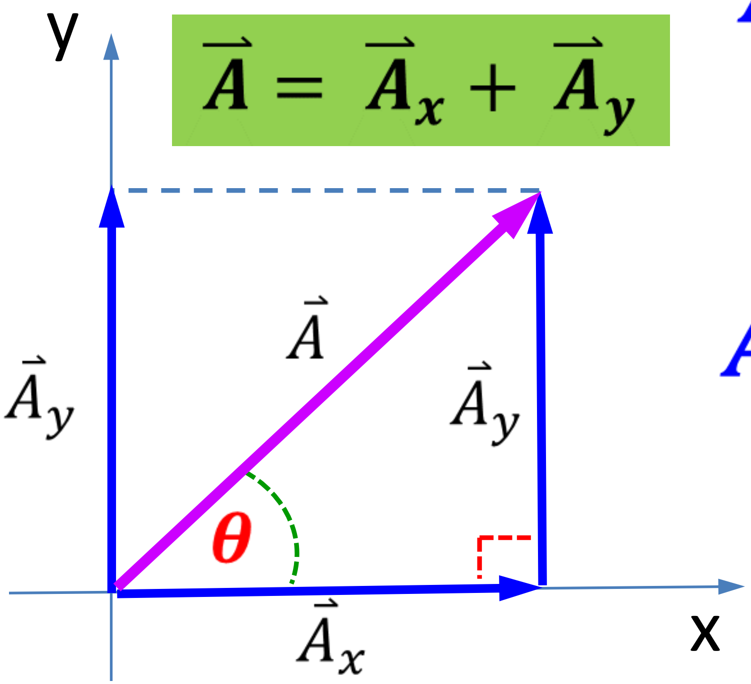
$$\tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{a}{b}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

การบวกเวกเตอร์ (ต่อ)

3. วิธีการแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

A_x : ขนาดเวกเตอร์ย่อยในแกน x

$$A_x = A\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{A_x}{A}$$

A_y : ขนาดเวกเตอร์ย่อยในแกน y

$$A_y = A\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{A_y}{A}$$

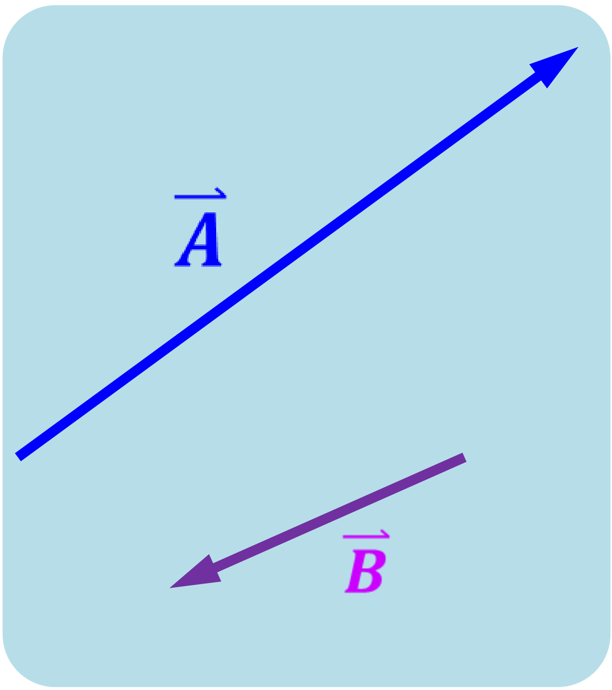
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

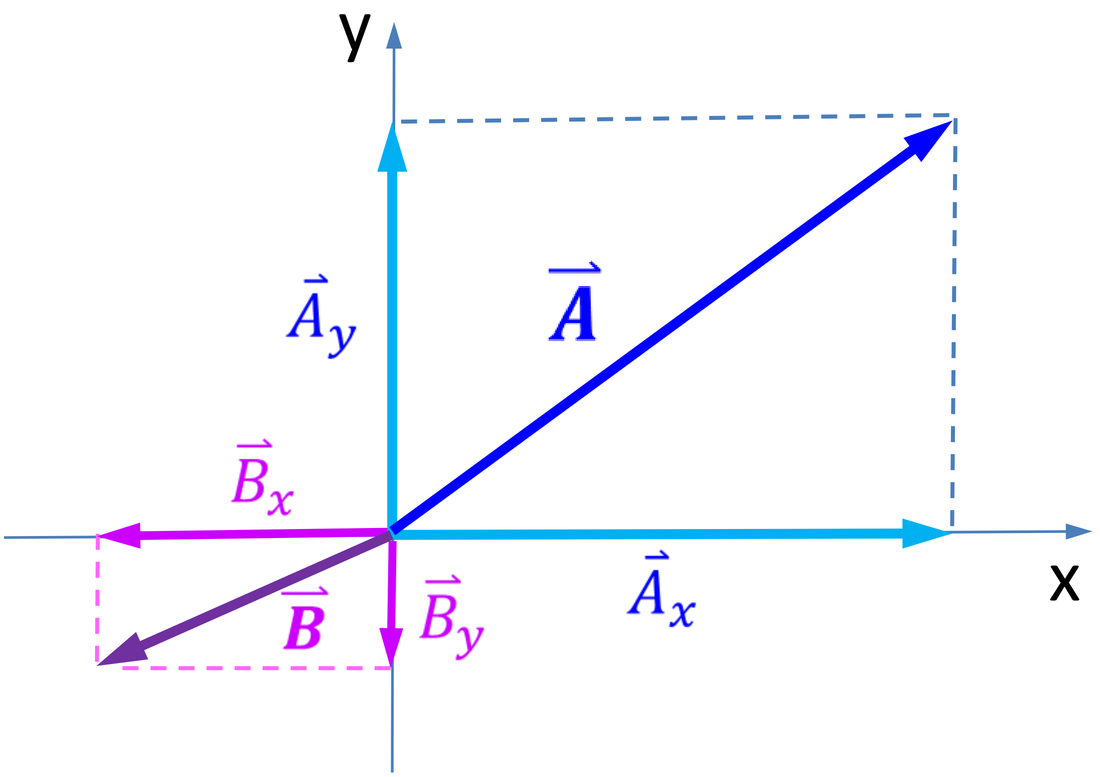
หมายเหตุ : A, A_x, A_y หมายถึง ขนาด ของเวกเตอร์ $\vec{A}, \vec{A}_x, \vec{A}_y$ ตามลำดับ (ไม่รวมถึงทิศทาง)

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

การบวกเวกเตอร์ (ต่อ)

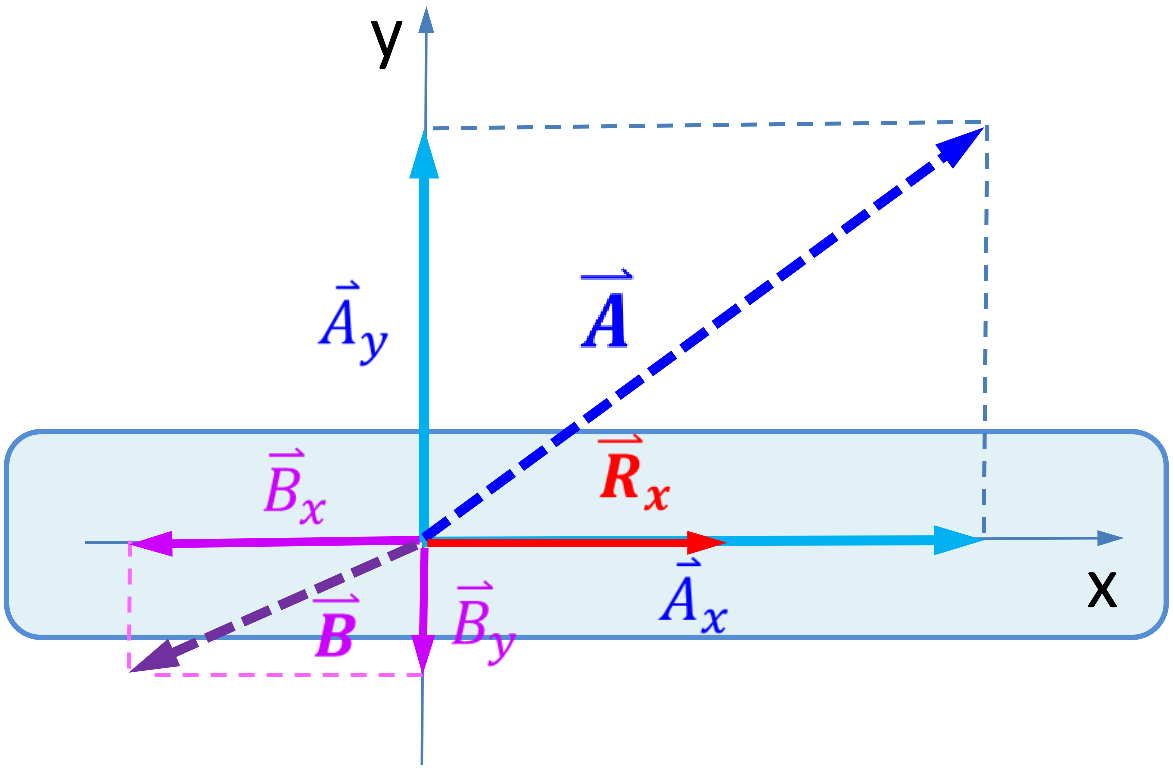
3. วิธีการแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย





3. วิธีการแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย

แนวแกน x

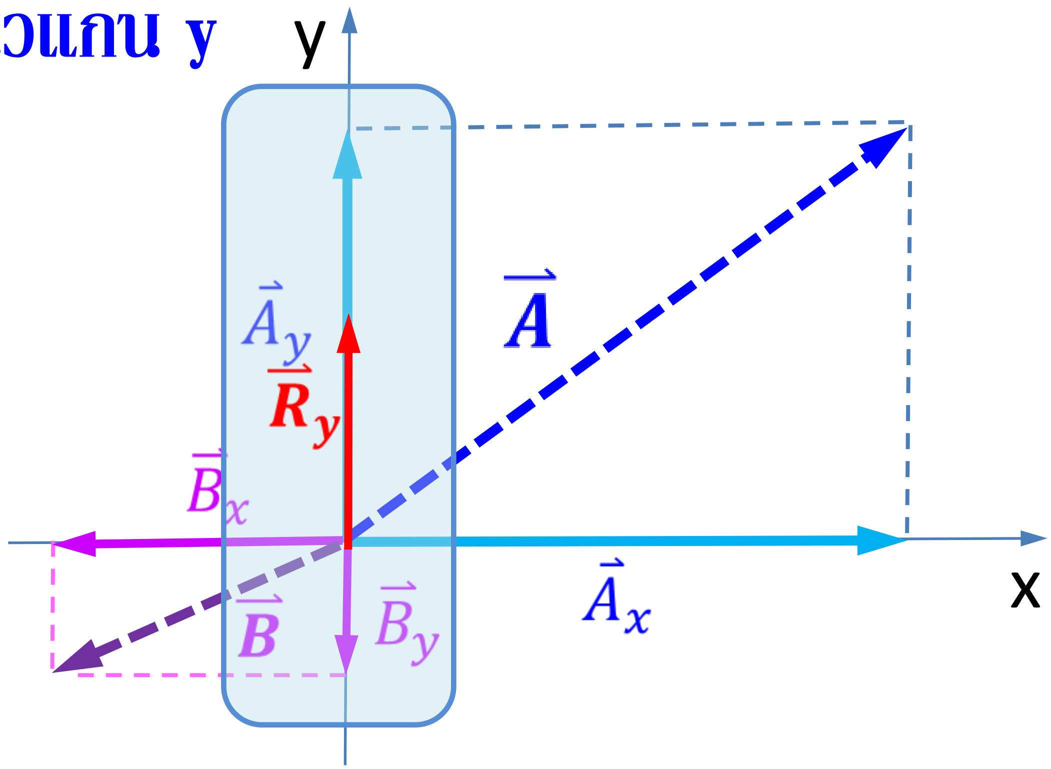


$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$$

$$\vec{R}_x = \vec{A}_x - \vec{B}_x$$

3. วิธีการแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย

แนวแกน y

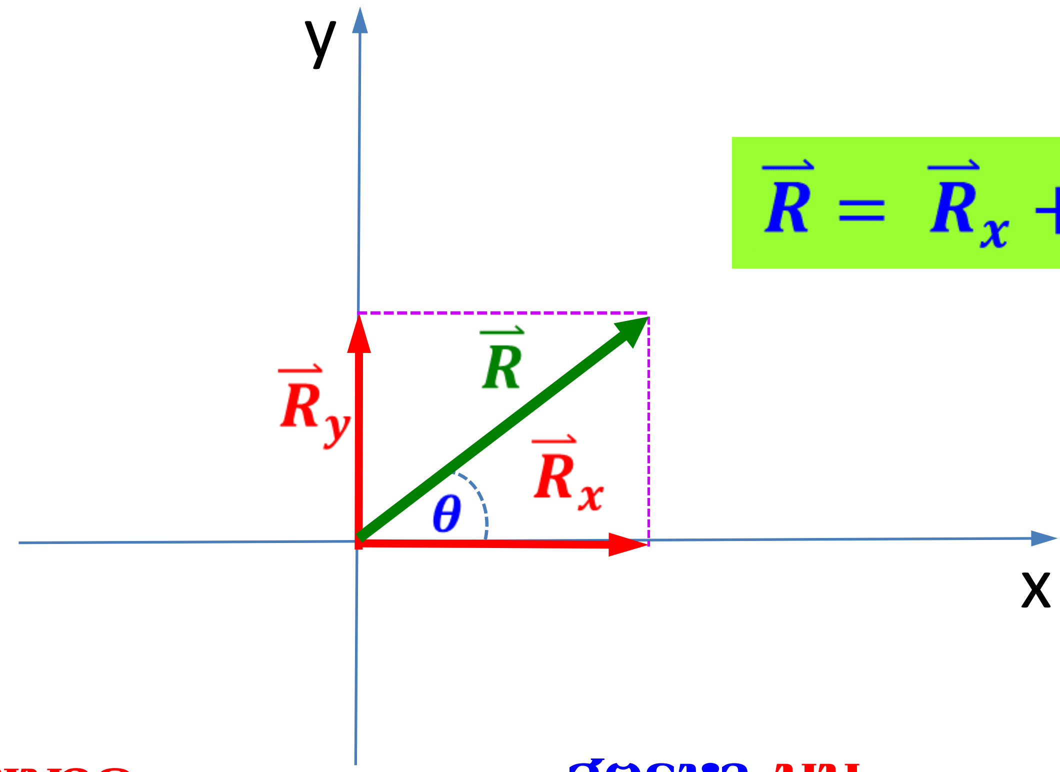


$$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y$$

$$\vec{R}_y = \vec{A}_y - \vec{B}_y$$

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

3. วิธีการแยกเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ย่อย



$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

สูตรหา ขนาด

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2}$$

สูตรหา มุม

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

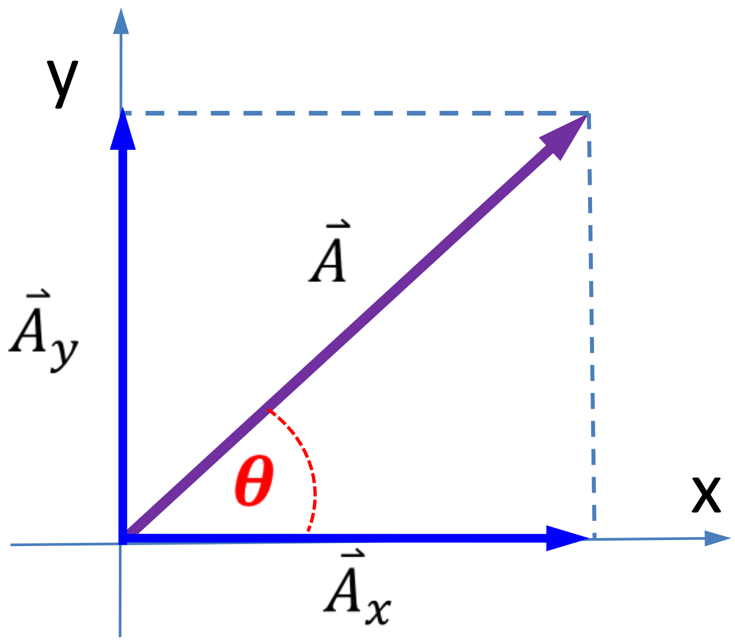
ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

วิธีการระบุปริมาณเวกเตอร์ (วิธีที่สอง)

เวกเตอร์ย่อย

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\sin\theta$$



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

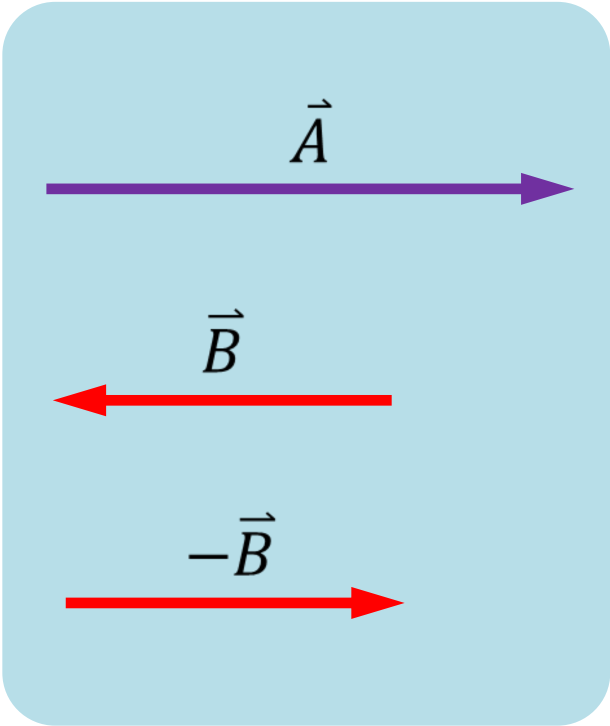
$$\vec{A} = A\cos\theta\,\hat{\imath} + A\sin\theta\,\hat{\jmath}$$

A_x, A_y เป็นตัวเลขที่บอกขนาดของเวกเตอร์ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ เป็นตัวบอกทิศทางในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ (มีขนาดยาว 1หน่วย)

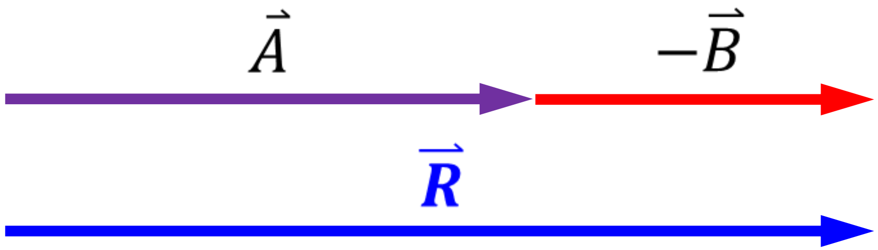
ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

การลบเวกเตอร์:



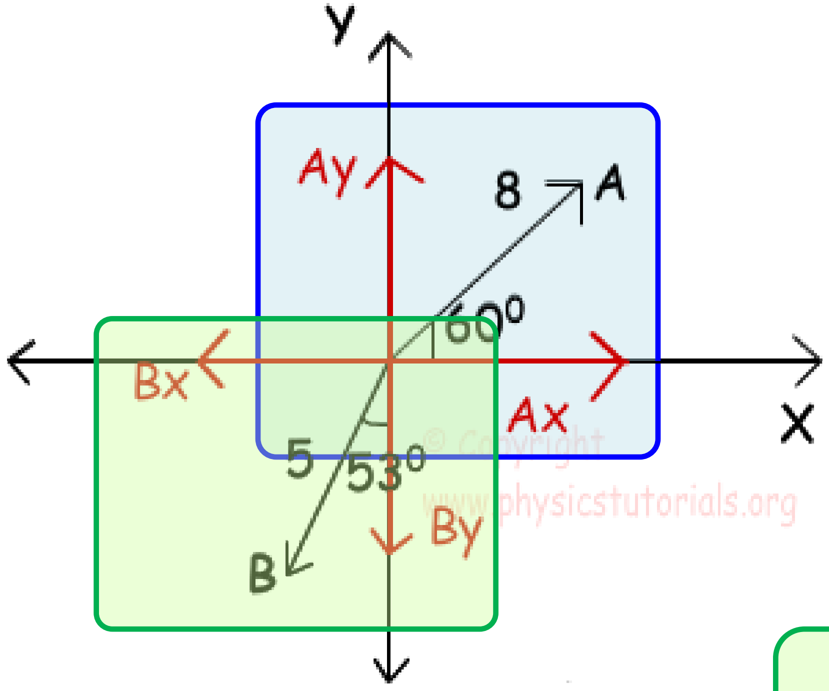
$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



หมายเหตุ : การลบเวกเตอร์ ให้กลับทิศทางของเวกเตอร์ที่เป็นลบ แล้วสามารถหาผลรวมได้เหมือนกับการบวกเวกเตอร์ทั่วไป

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



Components of A;

$Ax = A.\cos 60^0$

$Ax = 8.1/2 = 4$

$Ay = A.\sin 60^0$

$Ay = 8.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Components of B;

$Bx = B.\sin 53^0$

$Bx = 5.4/5 = 4$

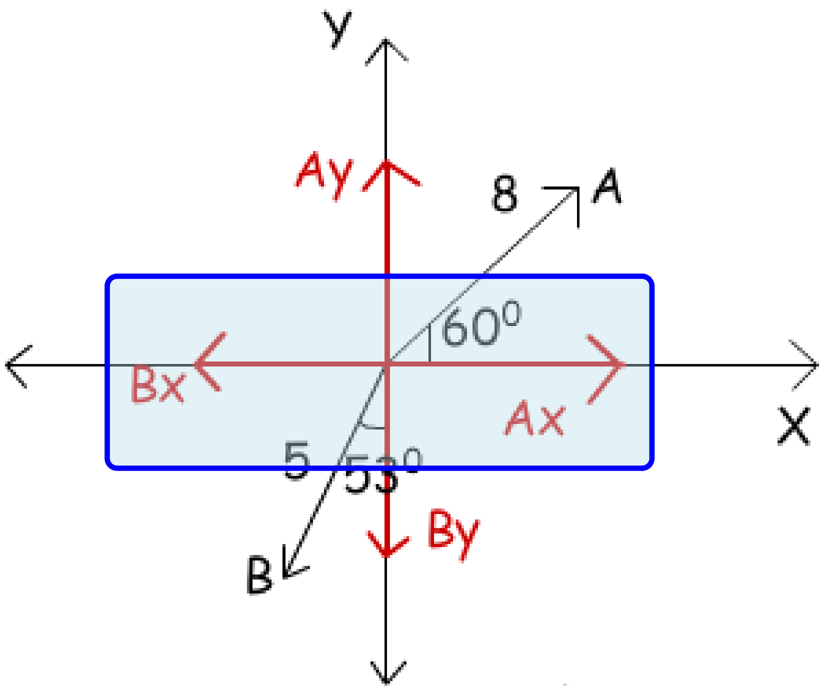
$By = B.\cos 53^0$

$By = 5.3/5 = 3$

http://www.physicstutorials.org/home/vectors

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

ขนาดของเวกเตอร์ย่อย ในแนวแกน x



$$A_x = 4$$

$$B_x = 4$$

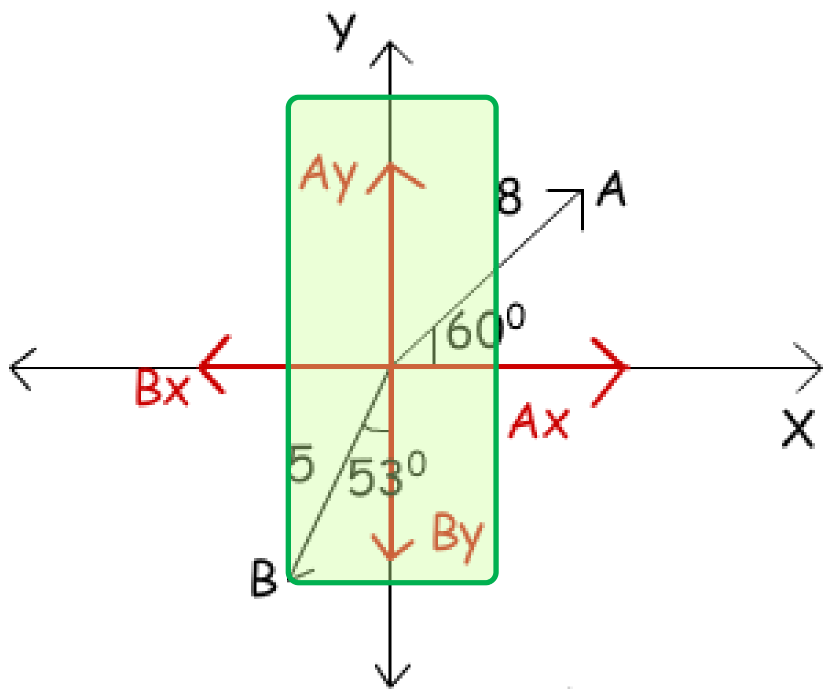
$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$$

$$R_x = 4 - 4 = 0$$

http://www.physicstutorials.org/home/vectors

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

ขนาดของเวกเตอร์ย่อย ในแนวแกน y



$$A_y = 4\sqrt{3}$$

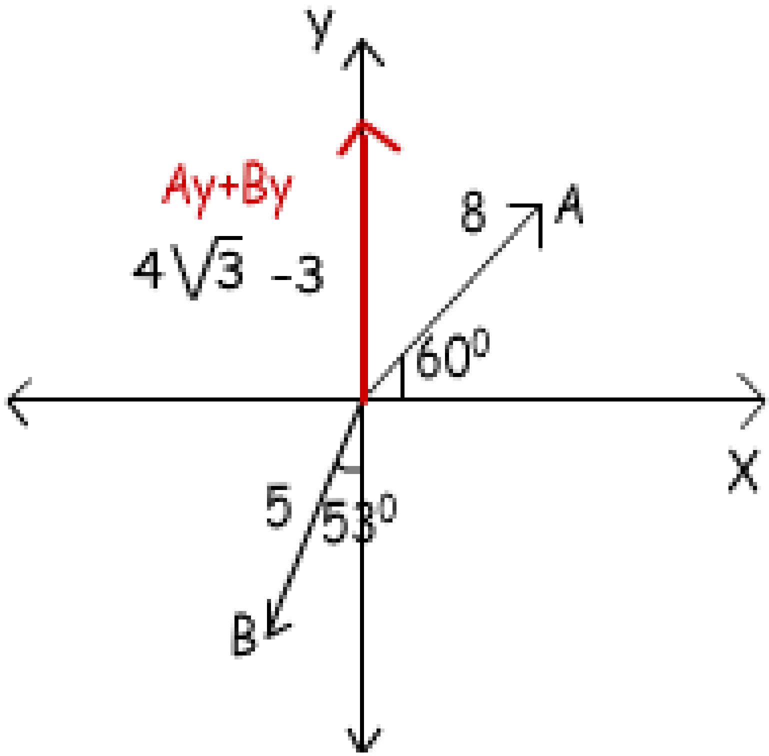
$$B_y = 3$$

$$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y$$

$$R_y = 4\sqrt{3} - 3$$

http://www.physicstutorials.org/home/vectors

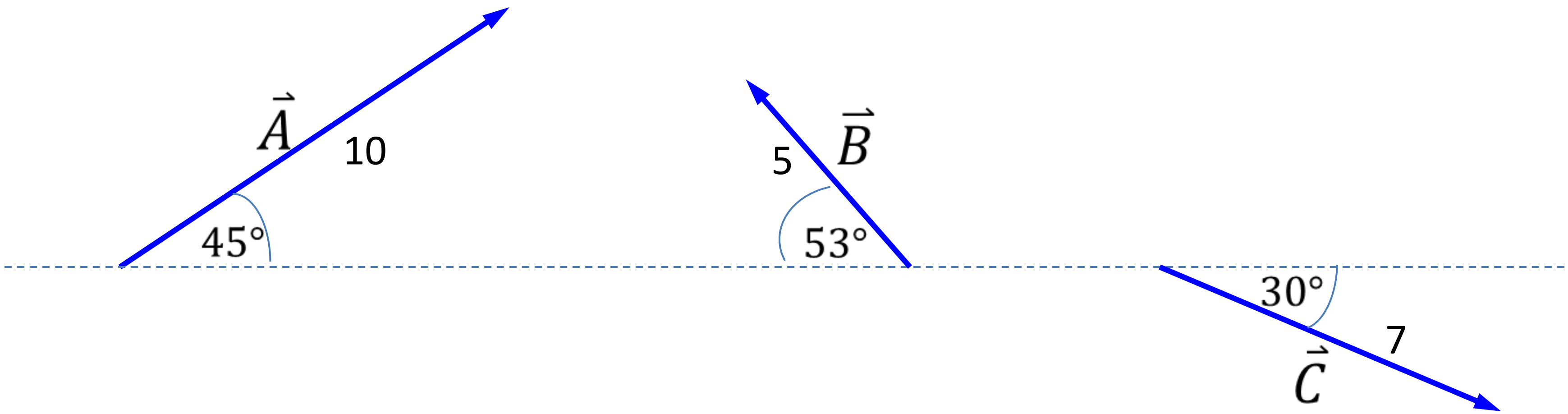
ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$



$$A_x + B_x = 4 - 4 = 0$$

$$A_y + B_y = 4\sqrt{3} - 3$$

การบ้าน 1 จงหา $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ โดยวิธีแยกเวกเตอร์



Homework #1

การคูณเวกเตอร์มีด้วยกัน 2 แบบ คือ

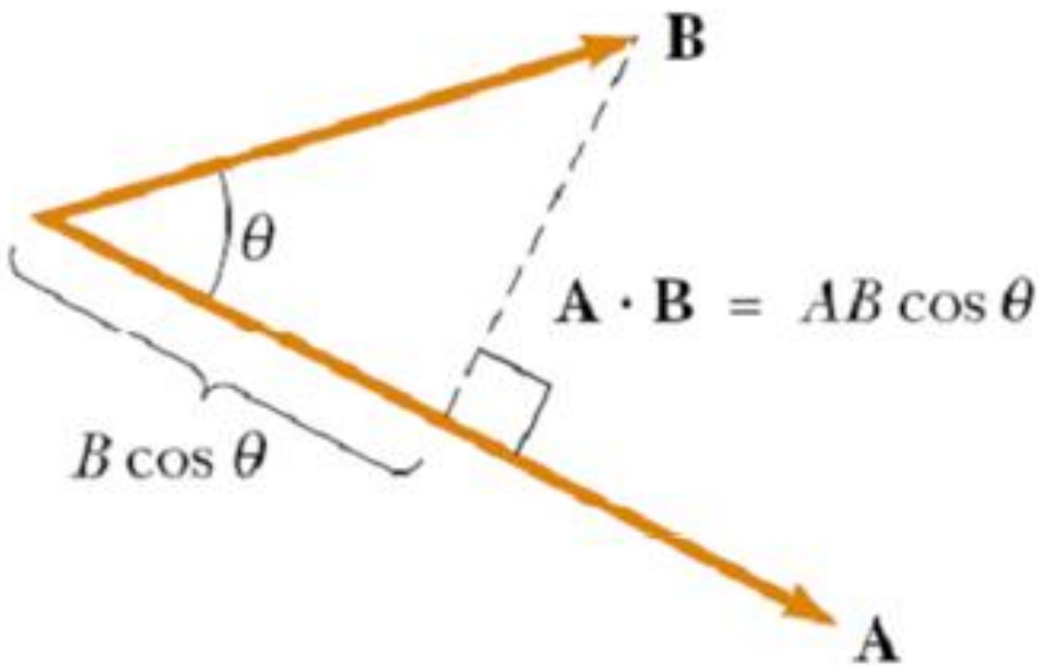
1. ผลลัพธ์เป็นปริมาณสเกลลาร์

   (Scalar Product หรือ Dot Product)

2. ผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์

   (Vector Product หรือ Cross Product)

1. Dot Production หรือ Scalar Product

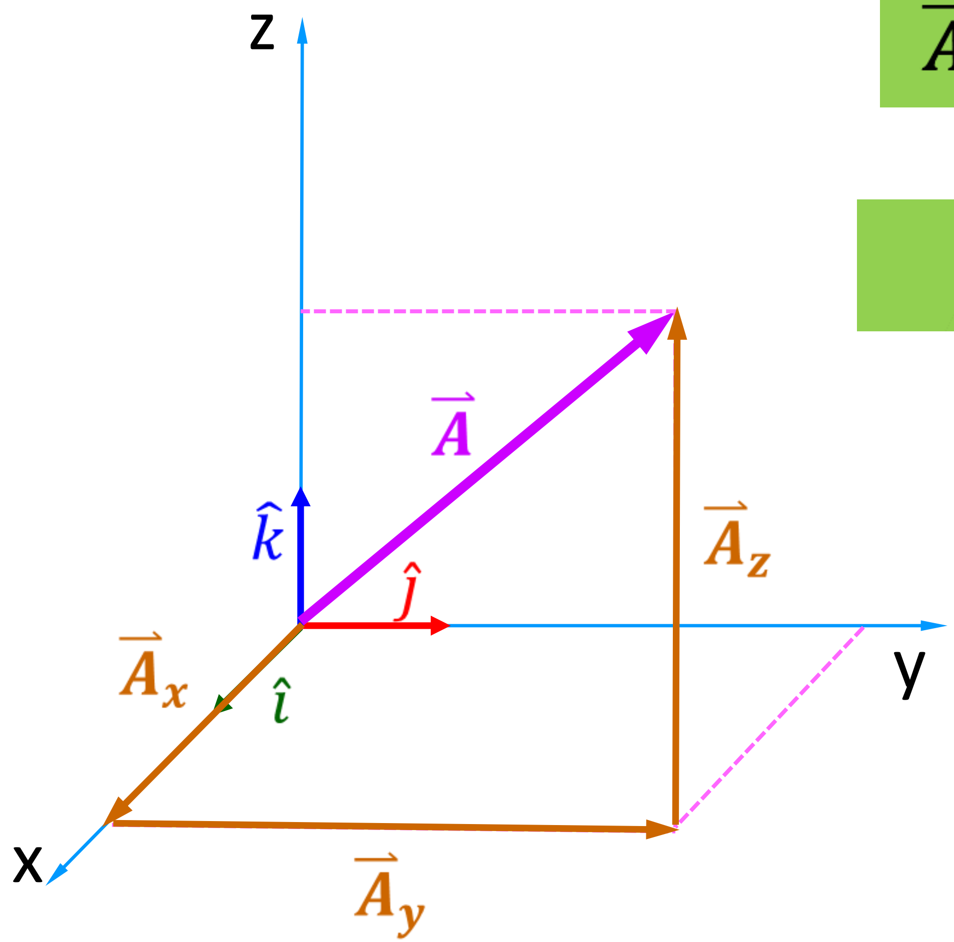


นิยาม

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB \cos \theta$$

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

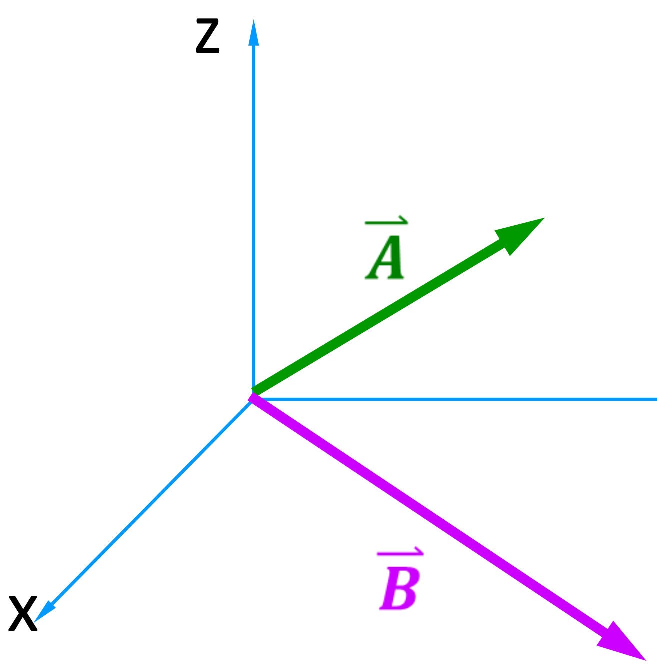
การเขียนเวกเตอร์ในรูปของเวกเตอร์หน่วย (3 มิติ)



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

Scalar Product ของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปเวกเตอร์หน่วย (3 มิติ)



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

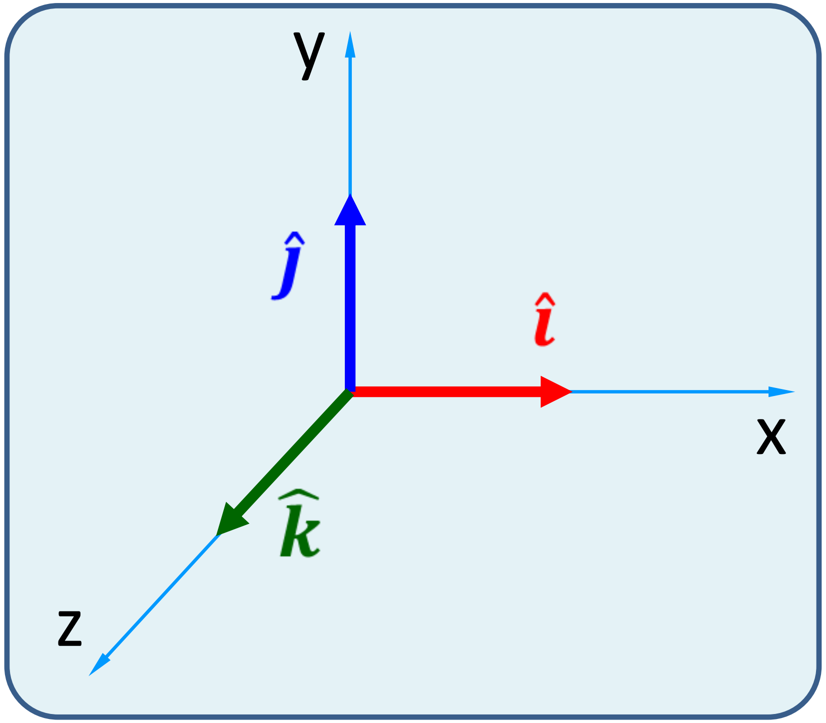
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2$$

ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

Scalar Product ของเวกเตอร์หน่วย

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv AB\cos\theta$$



$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)cos(0°) = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = (1)(1)cos(0°) = 1$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1)cos(0°) = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{j} = (1)(1)cos(90°) = 0 = \hat{j} \cdot \hat{\imath}$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{k} = (1)(1)cos(90°) = 0 = \hat{k} \cdot \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \cdot \hat{j} = (1)(1)cos(90°) = 0 = \hat{j} \cdot \hat{k}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้ง 2 ดังนี้

A = 2i + 3j + 4k และ B = i − 2j + 3k (66.6^{o})

2. Cross Production หรือ Vector Product (3 มิติ)

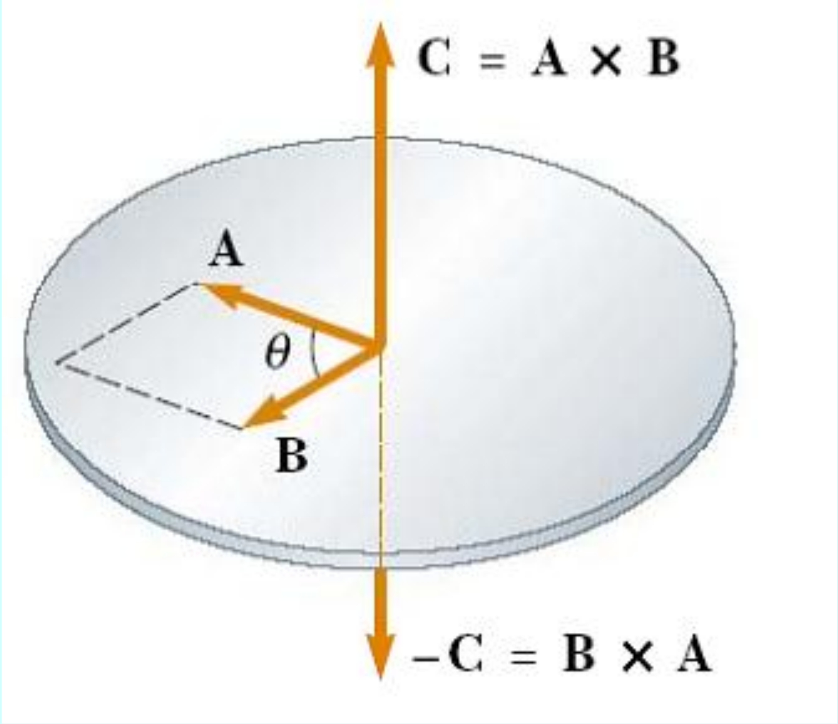
นิยาม

สัญลักษณ์

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

สูตรหาขนาด

$$C = AB\sin\theta$$



การหาทิศทาง : กฎมือขวา

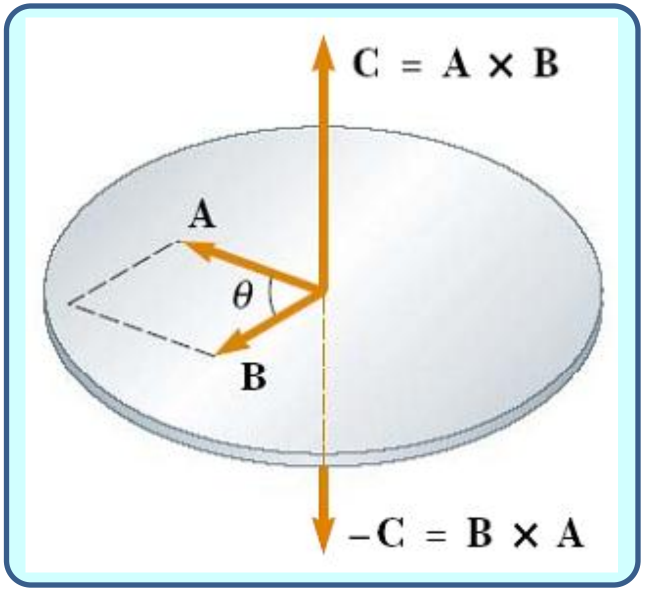
ปริมาณเวกเตอร์ (Vector quantities)

การหาขนาด : โดยวิธี Determinant

The **magnitude of the cross product** is given by

$$\left|\vec{C}\right| = \vec{A}\times\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

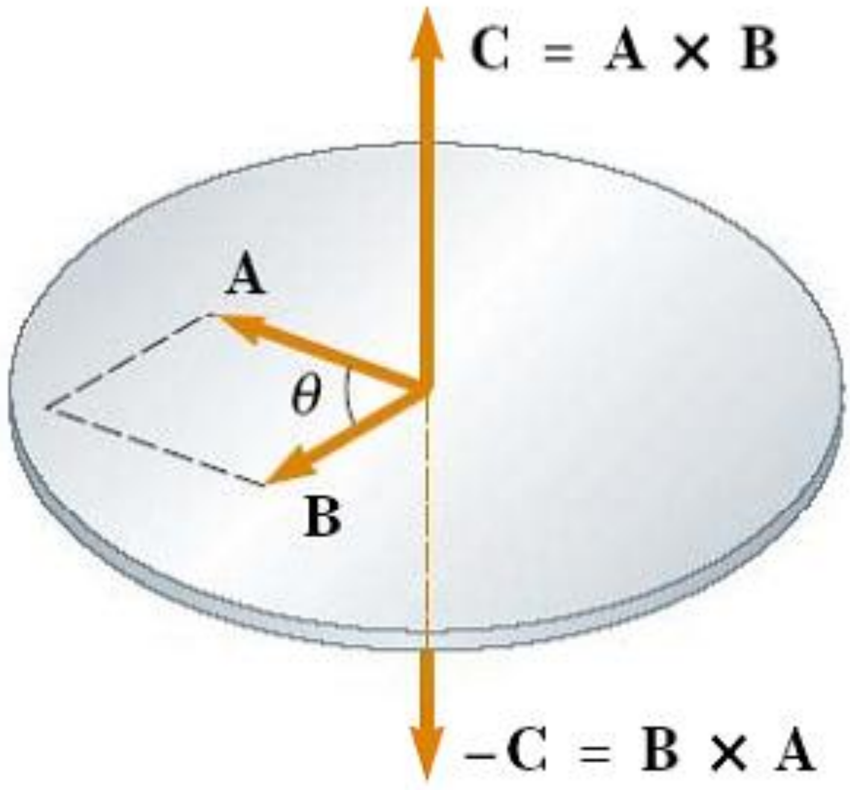


The cross product, $\vec{C}$, is a **vector** and is given by

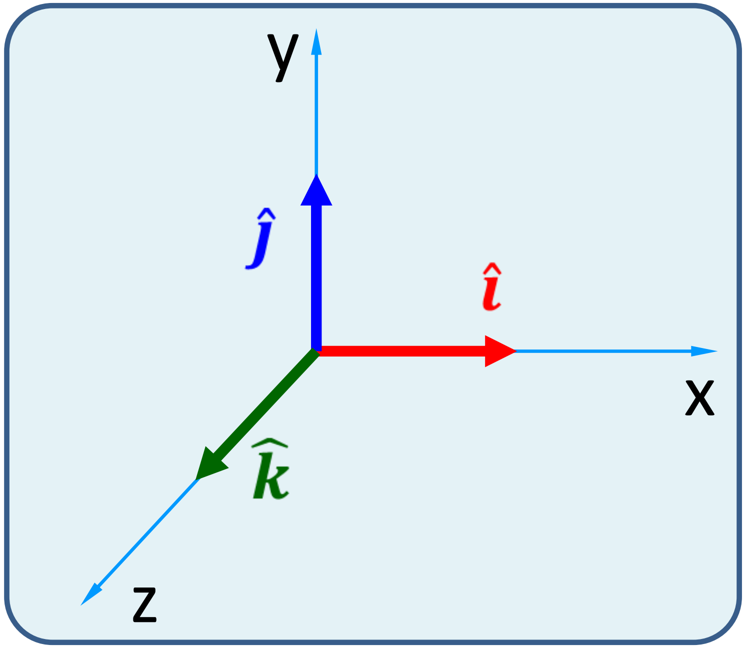
$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{y} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{z}$$

2. Cross Production หรือ Vector Product (3 มิติ)

การหาทิศทาง : กฎมือขวา



Vector Product ของเวกเตอร์หน่วย



$$C = ABsin\theta$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = 0$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

$$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเวกเตอร์ลัพธ์จากการ cross vector

A = 5i − 2j + k กับ B = − 3i + j − 7k

คำตอบ (13i + 32j − k)

การบ้าน 2 พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{A} = 40\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}$

และ $\vec{B} = -30\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$ จงหา

1. ผลคูณสเกลาร์ (-1000)
2. ผลคูณเวกเตอร์ (1000k)
3. มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง(135^{o})

Homework #2